Entropie des pavages de Kari

Bruno Durand, Guilhem Gamard, Anael Grandjean

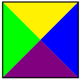
LIRMM

24 Octobre 2013

Tuiles de Wang

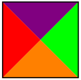
"Assume we are given a finite set of square plates of the same size with edges colored, each in a different manner. Suppose further there are infinitely many copies of each plate (plate type). We are not permitted to rotate or reflect a plate. The question is to find an effective procedure by which we can decide, for each given finite set of plates, whether we can cover up the whole plane (or, equivalently, an infinite quadrant thereof) with copies of the plates subject to the restriction that adjoining edges must have the same color."

Hao WANG, *Proving theorems by Pattern Recognition II. Bell Systems technical journal, 40 :1–41, 1961.*

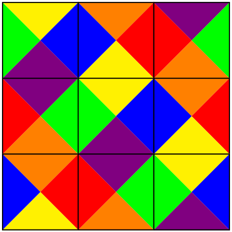


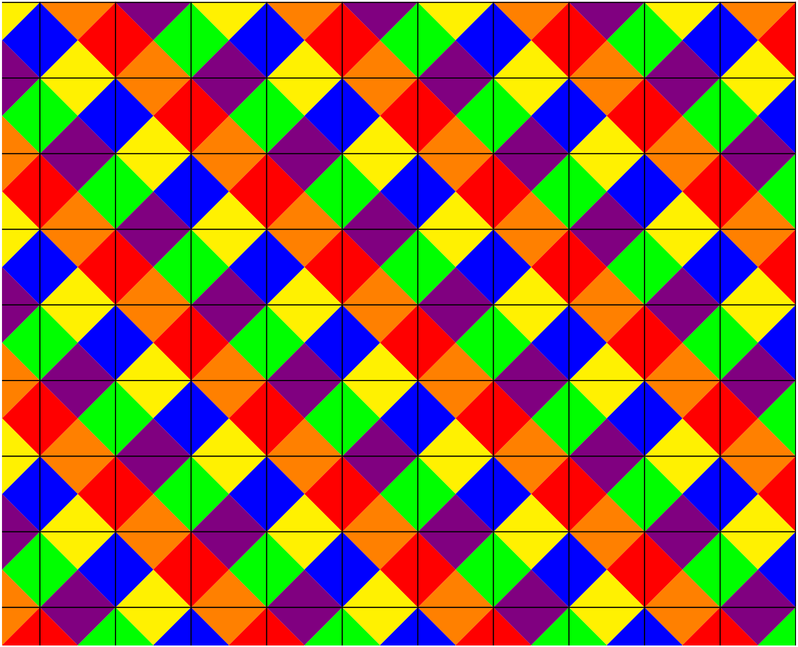
Type A

Type B



Type C



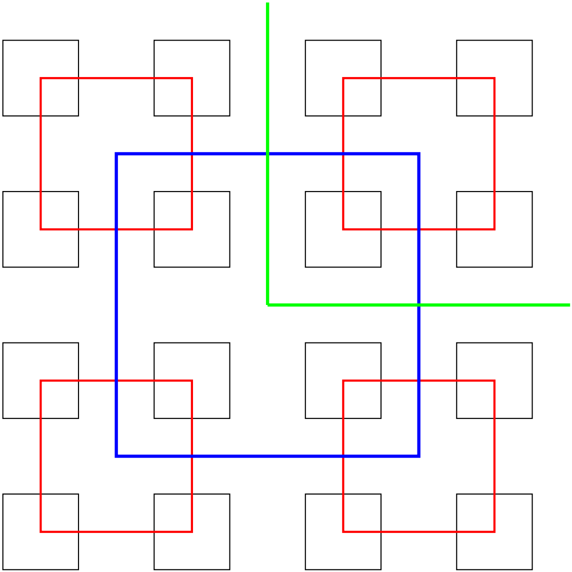


Pavages apériodiques

- Problème :Peut on décider si un ensemble de tuile permet de paver le plan ?
- Réponse : Non, la preuve s'appuie sur des pavages apériodiques :
  - Berger (1966, 103 tuiles)
  - Knuth (1966, 92 tuiles)
  - Robinson (1977, 24 tuiles)
  - Ammann (1978, 16 tuiles)
  - ...
  - Kari (1996,14 tuiles)
  - Culik (1996 13 tuiles)

Pavage apériodique

Robinson :



Motivations

Notoriété publique : Le pavage de Kari n'est pas autosimilaire

Objectif : Avancer dans la compréhension de ces pavages apériodiques

Moyen : Les pavages autosimilaires ont une entropie nulle

Source de l'apériodicite : séquences apériodiques

Soit une séquence bi-infinie de réels x_n qui verifie :
$x_{n+1} = x_n \times 2$ ou $x_n \times \frac{1}{3}$ pour tout n.

Une telle séquence est nulle ou apériodique.

Supposons que x_n et x_m soient égaux et non nuls. Alors il existe i et j tels que $\frac{2^i}{3^j} = 1$.

Séquences apériodiques et pavages

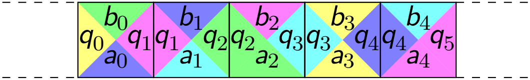
Voyons un pavage comme une séquence bi-infinie de lignes, dont les moyennes sont des réels.

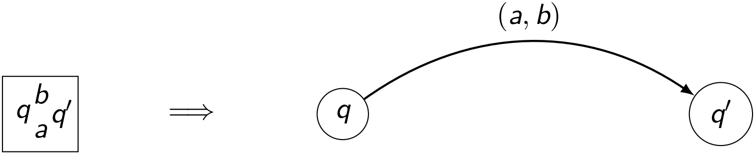
Lemme

Tout pavage dont les lignes ont des moyennes (non nulles) qui valent 2 fois ou $1/3$ de la precedente est apériodique.

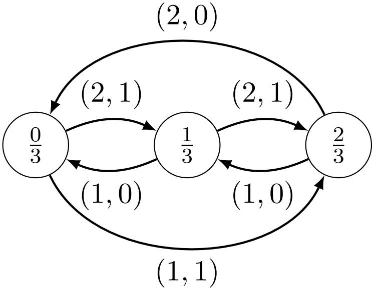
Pavages et transducteurs

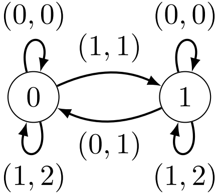
Les pavages peuvent être vus comme des transducteurs.



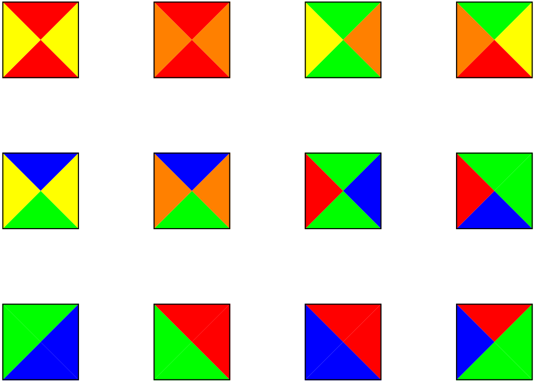


Les transducteurs de multiplication





Les tuiles



Existence d'un pavage

- Les mots mécaniques de pente dans $[\frac{1}{3}, 1]$ ou $[1, 2]$ sont reconnus par ces transducteurs.
- Etant donné un mot méchanique il en existe un tel que cette paire est reconnue par un des transducteurs.
- Pour construire un pavage il suffit de prendre le mot mécanique d'un réel et de continuer vers le haut et vers le bas avec les opérations $\times 2$ et $\times \frac{1}{3}$.

Apériodicité

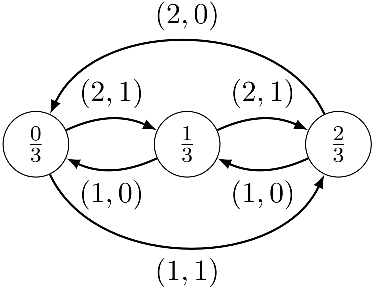
Lemme

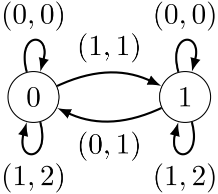
Pour cet ensemble de tuiles, toutes les lignes ont une moyenne bien définie.

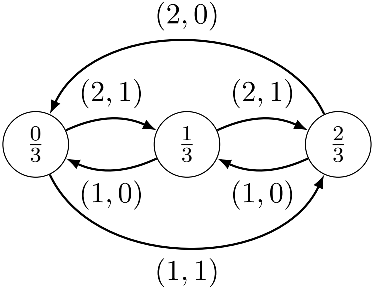
Corollaire

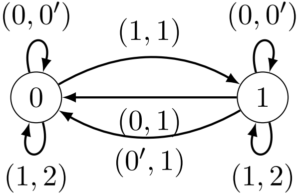
Cet ensemble de tuile pave le plan de façon apériodique ou nulle.

Eviter le pavage identiquement nul

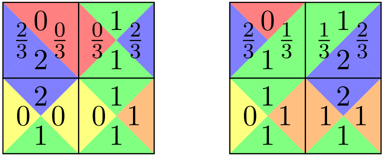


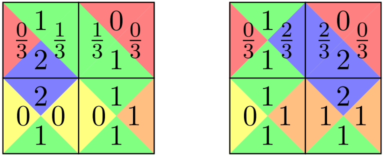






Présentation de paires substitutives





Lemme

Une des paires substitutives apparait à chaque occurence de $01^\alpha 011$ *avec* $\alpha > 3$.

Apparition des paires substitutives

1	2	2	$\cdots$	2	1	2	$\cdots$	2	2	1
$0'$	1	1	$\cdots$	1	1	1	$\cdots$	1	1	$0'$

1	1	2	2	2	$\cdots$	2	2	2	2	1
$0'$	1	1	1	1	$\cdots$	1	1	1	1	$0'$

1	2	2	2	$\cdots$	2	2	1	1	1	2
$0'$	1	1	1	$\cdots$	1	1	1	$0'$	1	1

Apparition des blocs de 1

Lemme

Un motif de la forme $01^{\alpha}011$ *avec* $\alpha > 3$ *apparait avec une densité positive dans toute ligne de moyenne supérieure à* $\frac{4}{5}$*. Cette densite tend vers* 0 *lorsque la moyenne tend vers* 1*.*

Apparition des lignes avec une moyenne proche de 1

Théorème

Les orbites des lignes sont denses.

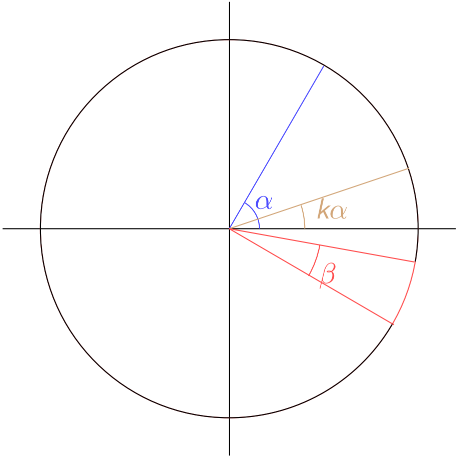
Démonstration.

Il s'agit de montrer que la transformation sur les lignes est une rotation d'angle irrationnel.

$$\phi : [\frac{1}{3}; 2] \to [0; 1]$$
$$\phi(x) = \frac{\log(x) - \log(\frac{1}{3})}{\log(2) - \log(\frac{1}{3})}$$

$$\phi(2x) = \phi(x) + \alpha$$
$$\phi(x/3) = \phi(x) + \alpha$$

□


α
$k\alpha$
β

- Le motif $01^\alpha 011$ avec $\alpha > 3$ apparait avec une densité positive sur les lignes de moyenne entre $\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{10}$.
- Ces lignes apparaissent avec une densité posititve dans tout pavage
- Les paires entropiques apparaissent avec une densité positive tout pavage
- L'ensemble de tuile proposé est d'entropie positive

Problèmes Ouverts

- Chaque paire subsitutive apparait-elle avec une densité positive ?
- L'entropie reste-t-elle positive si on interdit un motif pour chacune des paires substitutives ?