# Universalité intrinsèque dans l'auto-assemblage

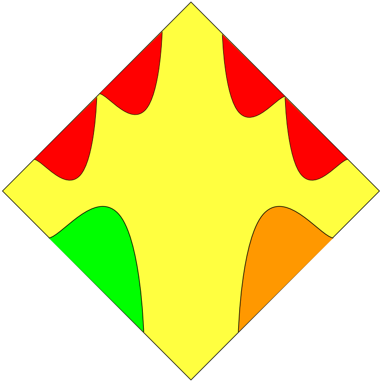
Florent Becker

FRAC d'automne 2013

# Plan

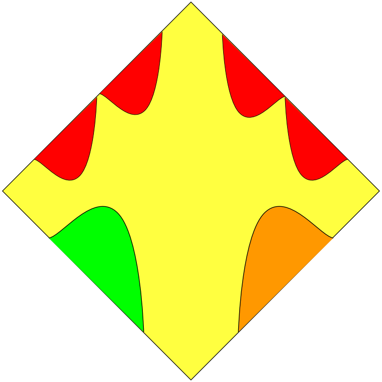
# Définition

- Un ensemble de dominos carrés,



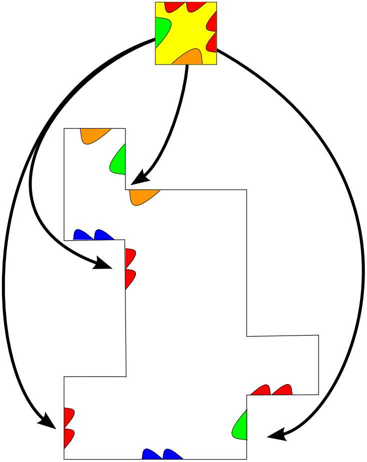
# Définition

- Un ensemble de tuiles de Wang,



# Définition

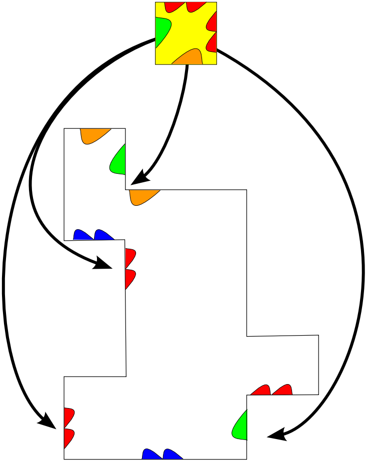
- Un ensemble de tuiles de Wang,
- Les couleurs ont des forces (on les appelle des colles).



Exemple à $T = 2$

# Définition

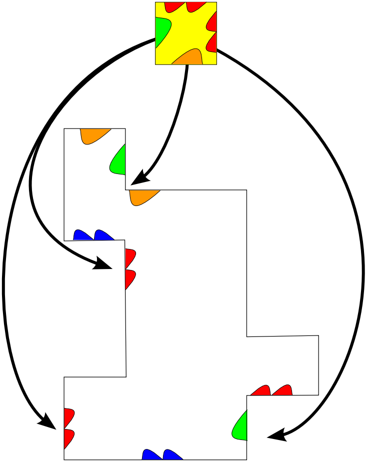
- Un ensemble de tuiles de Wang,
- Les couleurs ont des forces (on les appelle des colles).
- Ajout d'une tuile : la somme des liens doit dépasser la *température* (en pratique, 2...)



Exemple à $T = 2$

# Définition

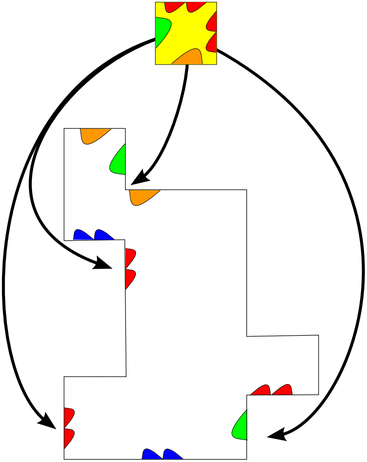
- Un ensemble de tuiles de Wang,
- Les couleurs ont des forces (on les appelle des colles).
- Ajout d'une tuile : la somme des liens doit dépasser la *température* (en pratique, 2...)
- Le système est non-déterministe (choix de la tuile et de la position)



Exemple à $T = 2$

# Définition

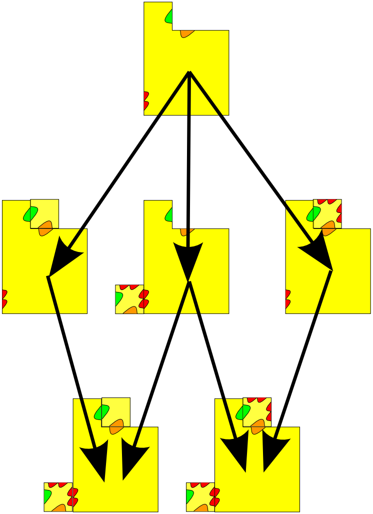
- Un ensemble de tuiles de Wang,
- Les couleurs ont des forces (on les appelle des colles).
- Ajout d'une tuile : la somme des liens doit dépasser la *température* (en pratique, 2...)
- Le système est non-déterministe (choix de la tuile et de la position)
- On part d'un motif source et on itère des ajouts de tuile.



Exemple à $T = 2$

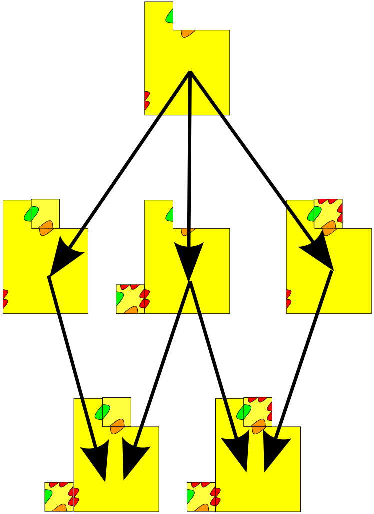
# Un peu de vocabulaire

- (transition) $P_0 \rightarrow_T P_1$ si on peut ajouter une tuile à $P_0$ pour arriver à $P_1$



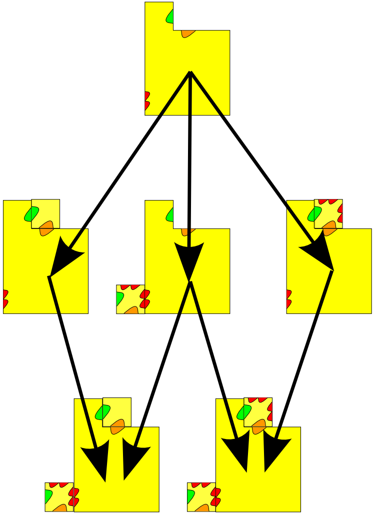
# Un peu de vocabulaire

- (transition) $P_0 \rightarrow_T P_1$ si on peut ajouter une tuile à $P_0$ pour arriver à $P_1$
- $\rightarrow_T^*$ est la cloture transitive de $\rightarrow_T$



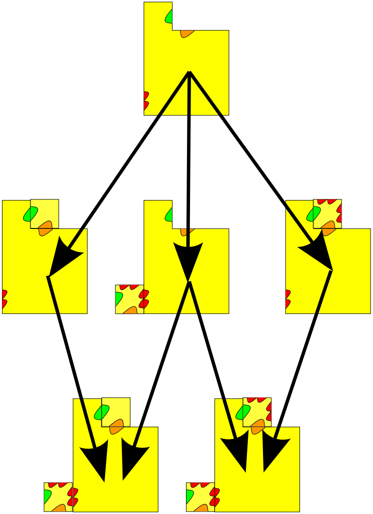
# Un peu de vocabulaire

- (transition) $P_0 \rightarrow_T P_1$ si on peut ajouter une tuile à $P_0$ pour arriver à $P_1$
- $\rightarrow_T^*$ est la cloture transitive de $\rightarrow_T$
- On obtient ainsi les productions

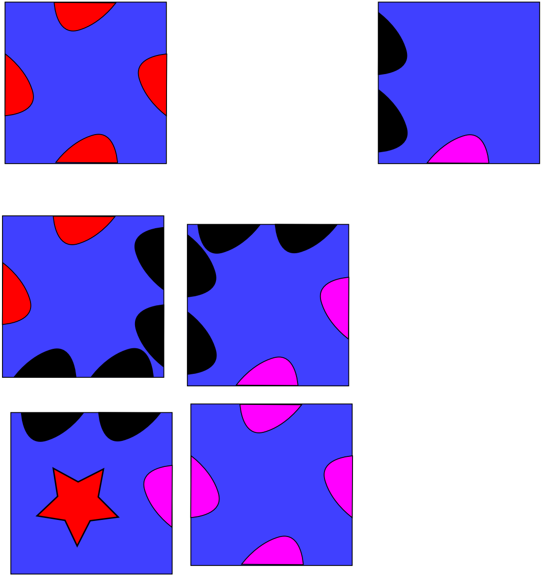


# Un peu de vocabulaire

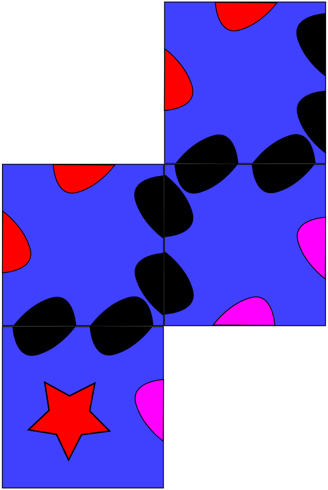
- (transition) $P_0 \rightarrow_T P_1$ si on peut ajouter une tuile à $P_0$ pour arriver à $P_1$
- $\rightarrow_T^*$ est la cloture transitive de $\rightarrow_T$
- On obtient ainsi les productions
- Une production finale est une production à laquelle on ne peut pas ajouter de tuile.



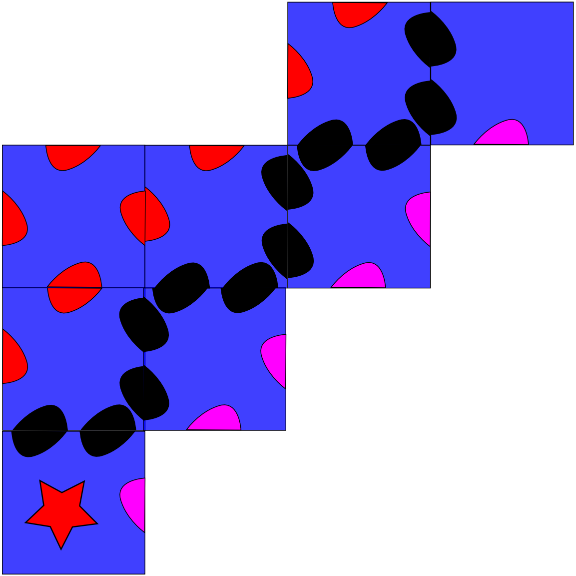
# Exemple



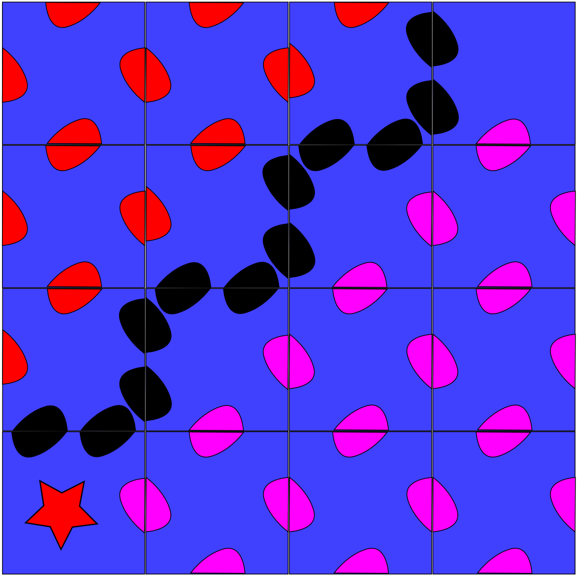
# Exemple



# Exemple



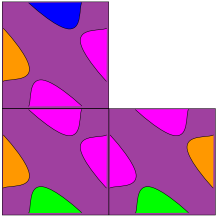
# Exemple

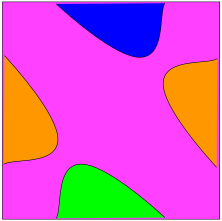


# Supertuile

## Definition (Supertuile)

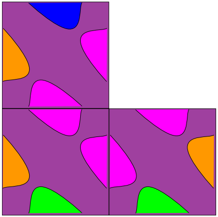
Une *supertuile* de taille $m$ est une fonction partielle de $\{0, \ldots, m-1\}^2_m$ dans $T$. On note $B^T_m$ l'ensemble des supertuiles de taille $m$ sur $T$.



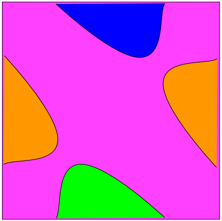


## Definition (Fonction de représentation)

Une *fonction de représentation* $R$ de $T$ par $S$ à échelle $m$ est une fonction partielle de $B_m^S$ dans $T$ compatible avec l'inclusion.



- On peut étendre une *fonction de représentation* $R$ en $R^* : \mathcal{A}_S \mapsto \mathcal{A}_T$
- On appelle *fuzz* une position ayant une supertuile $x$ non-vide telle que $R(x)$ ne soit pas défini
- Une production est *propre* pour $R$ si tout fuzz est adjacent (orthogonalement) à une position où $R$ est définie.



# Simulation, I

## Definition

$\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ *ont les mêmes productions* (à échelle $m$ avec fonction de représentation $R$) si les productions de $\mathcal{S}$ sont envoyées proprement par $R$ sur celles de $\mathcal{T}$, les productions finales sur les productions finales.

## Definition

$\mathcal{S}$ *suit* $\mathcal{T}$ (par $R$) si quand $\alpha \mapsto_{\mathcal{T}} \beta$, $R^*(\alpha) \mapsto_{\mathcal{S}} R^*(\beta)$

# Simulation, II

## Definition

$\mathcal{T}$ modélise $\mathcal{S}$ (par $R$) si pour toute production $\alpha$ de $\mathcal{T}$, il existe un *ensemble* $\Pi$ de productions de $\mathcal{S}$ telles que :

- pour $\alpha' \in \Pi$, $R^*(\alpha') = \alpha$,
- pour $\alpha \mapsto_{\mathcal{T}} \beta$, tout $\alpha' \in \Pi$ peut grossir en un $\beta'$ tel que $R^*(\beta') = \beta$
- pour $\alpha'' \mapsto \beta'$, avec $R^*(\alpha'') = \alpha$, il existe $\alpha' \in \Pi$ tel que $\alpha' \mapsto_{\mathcal{S}} \alpha''$

# Simulation, III

## Definition

$\mathcal{S}$ simule $\mathcal{T}$ par $R$ si ils ont les mêmes productions, $\mathcal{S}$ suit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ modélise $\mathcal{S}$.

# Universalité intrinsèque

## Definition

Un système $\mathcal{S}$ est universellement intrinsèque si pour tout $\mathcal{T}$, il existe (effectivement) une échelle $m$, une fonction de représentation $R$ et une source $\sigma$ telles que $(\mathcal{S}, \sigma)$ simule $\mathcal{T}$.

Nous allons montrer :

- qu'il existe des systèmes IU pour des classes restreintes d'auto-assemblage (Doty, Lutz, Patitz, Summers, Woods @ STACS 2010)
- qu'il existe un système (à température 2) IU pour tous systèmes d'auto-assemblage (Doty, Lutz, Patitz, Schweller, Summers, Woods @ FOCS 2012)
- *qu'il n'existe pas de système IU à température 1 (Meunier, Patitz, Summers, Theyssier, Winslow, Woods @ SODA 2014)*
- qu'il n'existe pas de système IU sans mismatch (B, Meunier, Woods en cours)
- dans quelle mesure on peut se passer du non-déterminisme

# Une première construction

## Definition

Un système $\mathcal{S}$à température 2 est *plan-plan* si à chaque fois qu'une tuile est ajoutée dans $\mathcal{S}$,

- soit elle a un unique voisin
- soit elle a deux voisins *consécutifs*, en contact avec deux colles de force 1

## Theorem

*Il existe un sytème $\mathcal{S}$ intrinsèquement universel pour les systèmes plan-plans.*

# Principe de la construction

- Encodage des colles
- Simuler un ajout avec deux voisins
- Simuler un ajout avec un voisin
- Simuler la tuile-source

# Un peu de fantaisie (pas trop)

## Definition

Un système $\mathcal{S}$ à température $\tau$ est *localement consistant* si à chaque fois qu'une tuile est ajoutée dans $\mathcal{S}$, la somme des forces des colles adjacentes est égale à $\tau$.

- Pas de mismatch
- Pas de surcollage

## Theorem

*Il existe un sytème $\mathcal{S}$ intrinsèquement universel pour les systèmes localement consistants.*

# Le prix de la fantaisie

- Comment faire les ajouts dans le cas NS ?
- On va devoir couper la communication entre les deux côtés
- Il faut encoder les choix non-déterministes à l'avance

# Le cas général

Il existe un système $\mathcal{S}$à température 2 qui est intrinsèquement universel pour l'ensemble de tous les systèmes d'auto-assemblage (quelle que soit leur température).

# Limites de la solution précédente

- Comment décider quels seront les côtés d'entrée / sortie ?
- Comment décider de manière cohérente dans quel ordre les côtés sont arrivés ?
- Comment ne pas couper en deux une supertuile en réunissant l'information de ses voisines Nord et Sud si celles-ci ne suffisent pas pour un ajout ?

# La température 1 ne simule pas $T \geq 2$

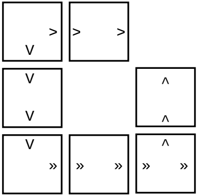
**Theorem**

*Il existe un système à température 2 qui n'est simulable par aucun système à température 1.*

# Les systèmes localement consistants ne sont pas universellement intrinsèques

### Theorem

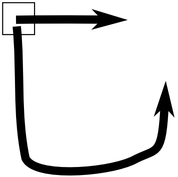
*Il existe un système auto-assemblant $\mathcal{S}$, de température 1 qui n'est simulable par aucun système localement consistant.*



# Les systèmes localement consistants ne sont pas universellement intrinsèques

**Theorem**

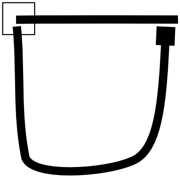
*Il existe un système auto-assemblant $\mathcal{S}$, de température 1 qui n'est simulable par aucun système localement consistant.*



# Les systèmes localement consistants ne sont pas universellement intrinsèques

**Theorem**

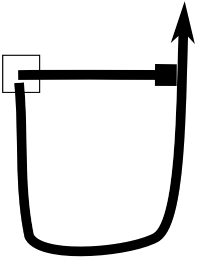
*Il existe un système auto-assemblant $\mathcal{S}$, de température 1 qui n'est simulable par aucun système localement consistant.*



# Les systèmes localement consistants ne sont pas universellement intrinsèques

### Theorem

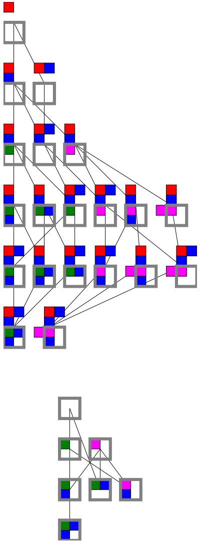
*Il existe un système auto-assemblant $\mathcal{S}$, de température 1 qui n'est simulable par aucun système localement consistant.*



# Dynamique locale

## Definition

Soit $R$ une partie du plan (pointée), la dynamique locale de $\mathcal{S}$ sur $R$ ($\mathcal{S}(R)$) est l'ordre induit par $\rightarrow_{\mathcal{S}}$ sur les productions de $\mathcal{S}$ restreintes à $R$.

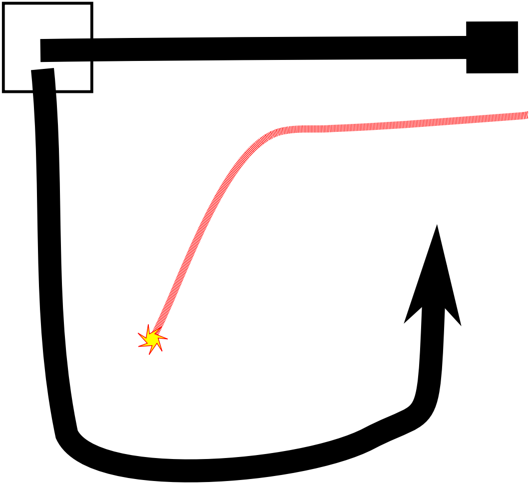


# ≪Interactive Window Movie Lemma≫

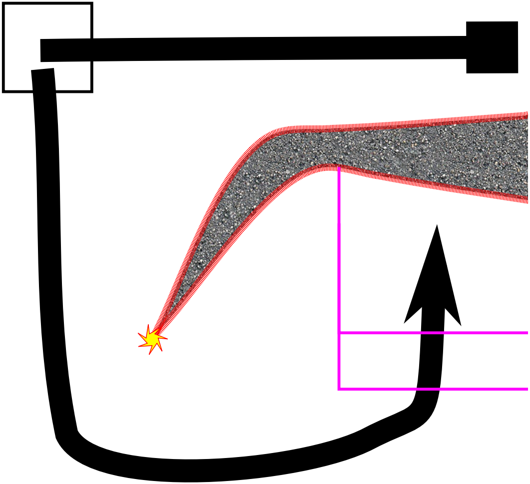
## Lemma

*Soit $C$, $C'$ qui sépare la grille en deux parties $C_0$ et $C_1$ (resp. $C'_0$ et $C'_1$) qui ne se voient pas, avec la source dans $C_0 \cap C'_0$. Si $\mathcal{S}(C) = \mathcal{S}(C')$, alors $\mathcal{S}(C_1) = \mathcal{S}(C'_1)$.*

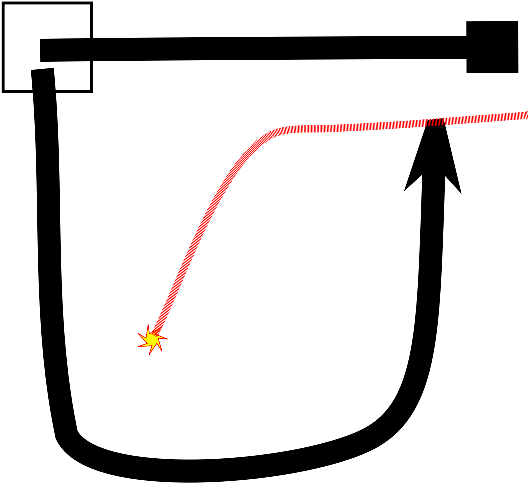
# Déchirer le long des pointillés



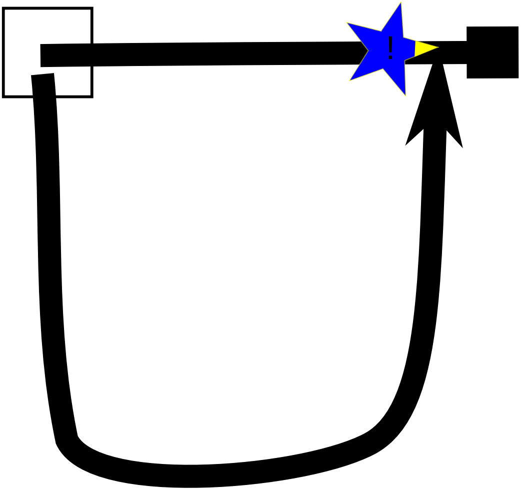
# Déchirer le long des pointillés



# Déchirer le long des pointillés



# Déchirer le long des pointillés



# Bilan

- Définition de systèmes d'auto-assemblage IU
- Discussion de simulation ≪discutable≫
- Classes de comportement : température 1, localement consistant, sans mismatches
- Est-il possible de simuler de manière déterministe tous les systèmes déterministes ? En 2D, probablement pas, en 3D, oui.
- Modèle avec mismatches de force $-\infty$